今日のテーマ

背理法

不確定な事実の真偽における意思決定の方法について考えましょう。

問①

あなたがもし冤罪事件に
巻き込まれてしまったら…
どうやって
自分の無実を証明しますか？

それでもボクはやってない　(1:12)
https://youtu.be/ccmaet30GWU

問②

あなたには3人の大切な部下がいます。
大きな商談があり，この3人のうち の
1人が成約することができました。

しかし，残念なことに成約できな
かった2人がうその発言をしています。

問②

「あなたは3人のうち
誰を信じますか？」

Ａ：成約できたのはＢではない。

Ｂ：成約できたのはＣではない。

Ｃ：成約できたのは私です。

問①と②で共通する考え方は何でしょうか？

証明したいことの

補集合を否定する！

背理法

背理法とは？

$3\sqrt{2}-2$が無理数であることを証明せよ。

ただし，$\sqrt{2}$は無理数であることを用いてもよい。

$3\sqrt{2}-2$が有理数であると仮定すると，

$3\sqrt{2}-2=p$ ⋯① とおける。（pは有理数）

①より $3\sqrt{2}=p+2$

$$\sqrt{2}=\frac{p+2}{3}$$

pは有理数だから $\frac{p+2}{3}$ は有理数である。

これは$\sqrt{2}$が無理数であることに矛盾する。

よって$3\sqrt{2}-2$は無理数である。

補集合，余事象に注目する例

1個のさいころを3回投げるとき，

3つの目の積が偶数になる確率は？

||

3つの目の少なくとも1つが偶数である

$\Updownarrow$

3つの目がすべて奇数である

問③

あなたの身の回りやこれからの人生で,
背理法はどのような場面で使えると思いますか？

【 今回の授業に関する主な既習事項（予備知識） 】

〇事象…同じ状態のもとで繰り返すことができる実験や観察により実験や観察（試行）により起こることがら
〇確率…ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値
〇（事象Ａの起こる確率）＝（事象Ａの起こる場合の数）÷（起こりうるすべての場合の数）
〇**事象Ａが起こったときの事象Ｂの起こる条件付き確率**
（事象Ａが起こったことがわかったとき、事象Ｂの起こる確率）
（事象Ａが起こったとして、そのときに事象Ｂの起こる確率）

条件付き確率の式

（事象Ａが起こったときの事象Ｂが起こる条件付き確率）
＝（事象Ａと事象Ｂがともに起こる場合の数）÷（事象Ａが起こる場合の数）

条件付き確率の式

（事象Ａが起こったときの
事象Ｂが起こる条件付き確率）
＝（事象Ａと事象Ｂがともに起こる確率）
÷ （事象Ａが起こる確率）

一般的な確率の乗法公式

（事象Ａと事象Ｂがともに起こる確率）
＝ （事象Ａが起こる確率）
× （事象Ａが起こったときの
事象Ｂが起こる条件付き確率）

（事象Ｂが起こったときの
事象Ａが起こる条件付き確率）
＝（事象Ｂと事象Ａがともに起こる確率）
÷ （事象Ｂが起こる確率）

（事象Ｂと事象Ａがともに起こる確率）
＝ （事象Ｂが起こる確率）
× （事象Ｂが起こったときの
事象Ａが起こる条件付き確率）

（事象Ａが起こる確率）　×　（事象Ａが起こったときの事象Ｂが起こる条件付き確率）

＝　（事象Ｂが起こる確率）　×　（事象Ｂが起こったときの事象Ａが起こる条件付き確率）

ベイズの定理

（事象Ｂが起こったときの事象Ａが起こる条件付き確率）

＝（事象Ａが起こる確率）×（事象Ａが起こったときの事象Ｂが起こる条件付き確率）

÷　（事象Ｂが起こる確率）

例１）　さいころ１個を１回投げる。　　２以上の目が出る確率は　５／６

例２）　さいころ１個を１回投げる。
２以上の目が出たとするとき、それが奇数の目である条件付き確率は

（2 以上で奇数の目が出る場合の数）÷（2 以上の目が出る場合の数）＝　２／５
あるいは
（2 以上で奇数の目が出る確率）÷（2 以上の目が出る確率）
＝　２／６　÷　５／６　＝　２／５

例３）　あたりくじ３本を含む 10 本のくじがある。
まず、A さんがくじを１本引く。引いたくじは戻さないで、次に B さんがくじを１本引く。

①　A さんが当たる確率は　３／１０

②　A さんが当たるとき、B さんが当たる条件付き確率は　２／９

ベイズの定理

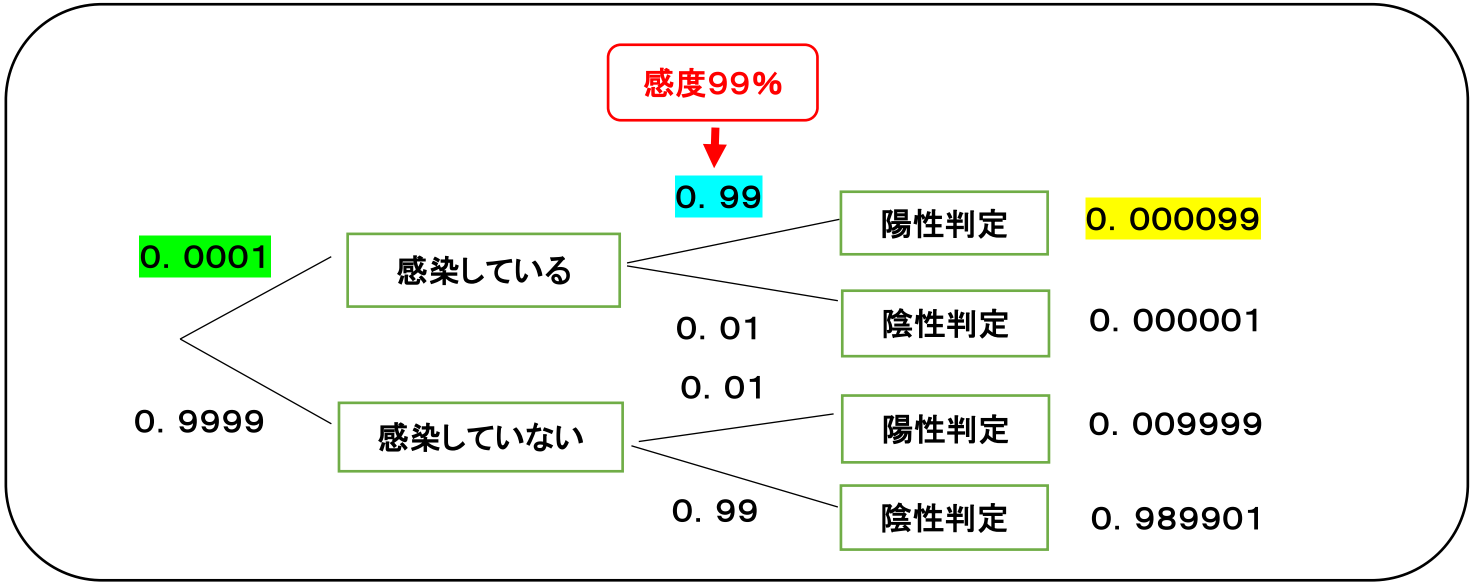
③　B さんが当たるとき、A さんが当たる条件付き確率は
（A さんが当たる確率）×（A さんが当たるときの B さんが当たる確率）
÷（B さんが当たる確率）＝　３／１０　×　２／９　÷　３／１０　＝　２／９

場面設定

現在２０３０年、新型のウイルスが発生し、感染率は１万人に１人の割合である。
このウイルスについては感染検査がある。この検査は、感染している人の９９％を正しく「陽性」、１％を誤って「陰性」と判定し、感染していない人の９９％を正しく「陰性」、１％を誤って「陽性」と判定する。

①　あなたがこの検査を受検して、「陽性」と判定されても、実際に感染している確率は、実は「1%」です。そもそも感度 99%の検査であるにもかかわらず、このようになるのはどうしてか考えてみよう。

② 無作為に選んだ１人が、実はこのウイルスに感染していて、かつ、この検査を受検した場合「陽性」と判定される確率を求めてみよう。



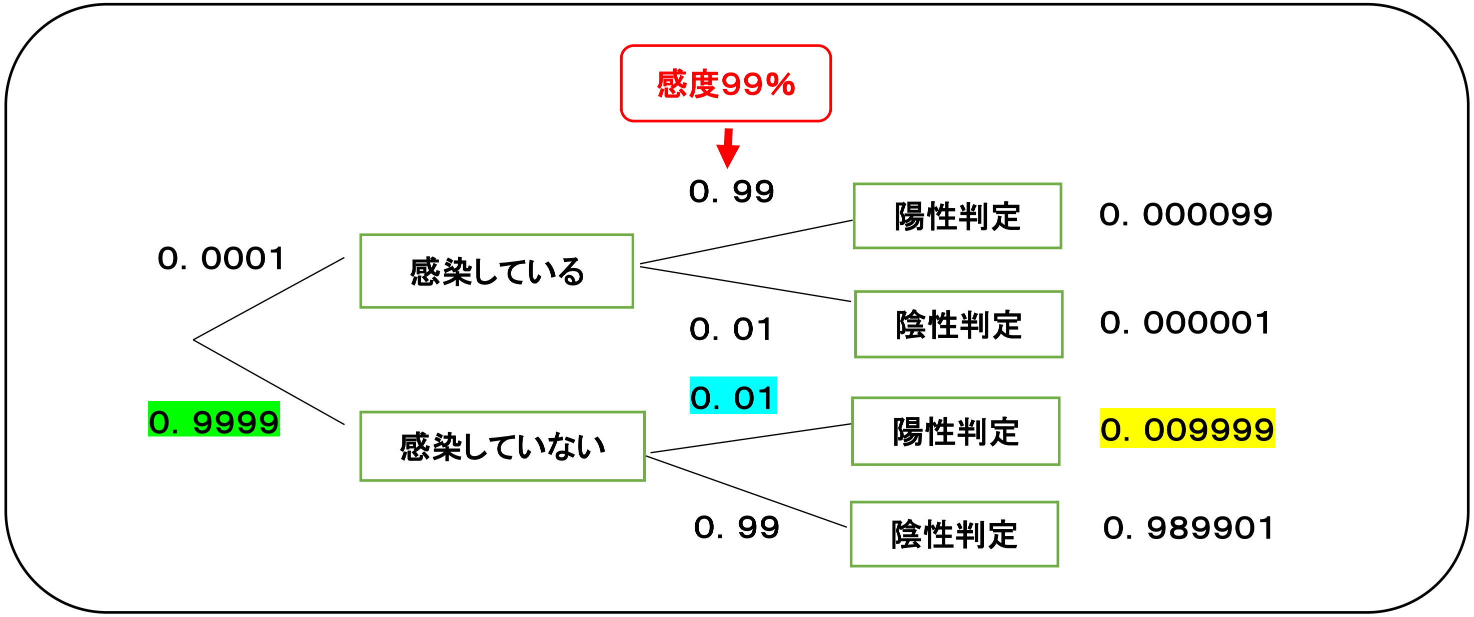
（実際にこのウイルスに感染していて、かつ、この検査を受検して「陽性」と判定される確率）

＝　（実際にこのウイルスに感染している確率）

×　（実際にこのウイルスに感染しているとき、検査で「陽性」と判定される確率）

＝　0.0001 × 0.99　＝　0.000099

③ 無作為に選んだ１人が、実はこのウイルスに感染していなくて、かつ、この検査を受検した場合「陽性」と判定される確率を求めてみよう。



（実際にこのウイルスに感染していなくて、かつ、この検査を受検して「陽性」と判定される確率）

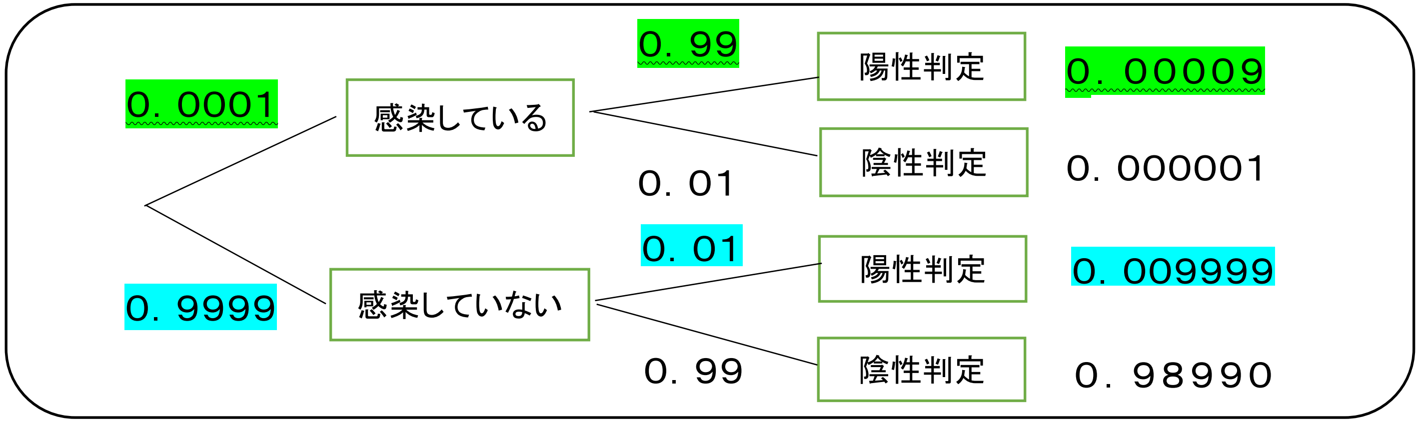
＝ （実際にこのウイルスに感染していない確率）

× （実際にこのウイルスに感染していないとき、検査で「陽性」と判定される確率）

＝ 0.9999 × 0.01

＝ 0.009999

④ あなたがこの検査を受検して、「陽性」と判定されても、実際に感染している確率は、実は「1％」です。そもそも感度99％の検査であるにもかかわらず、このようになるのはどうしてか、確率を用いて他者に分かりやすく説明しよう。



（「陽性と判定される」ときに「感染している」）確率

＝「感染している」確率 ×（「感染している」ときに「陽性と判定される」）確率

÷「陽性と判定される」確率

ベイズの定理

＝「感染している」確率 ×（「感染している」ときに「陽性と判定される」）確率
÷（「感染している」かつ「陽性と判定される」）確率
＋（「感染していない」かつ「陽性と判定される」）確率

$$= (0.0001 \times 0.99) \div (0.0001 \times 0.99 + 0.9999 \times 0.01)$$

$$= 0.000099 \div (0.000099 + 0.009999)$$

$$= 0.000099 \div 0.010098 = 0.0098039$$ （約1％）

⑤ 「陽性」と判定されたときの実際に感染している確率を「1％」より高めるために、この検査に関して、どの部分をどのように修正（変更）できるとよいと考えますか、あるいはどのようなことに気を付けるとよいと考えますか。

（個人２分　チャットへ入力してください。）

⑤

> 「陽性」と判定されたときの実際に感染している確率を「1%」より高めるために、この検査に関して、どの部分をどのように修正（変更）できるとよいと考えますか、あるいはどのようなことに気を付けるとよいと考えますか。

例えば次のようなことが考えられます。

○　感染率を高めた状態で検査をする。
（ 感染率１万人に１人　→　１０００人に１人　→　１００人に１人　→　１０人に１人　）
陽性的中率　（約 0.98%）　（約９%）　（50%）　（91.7%）

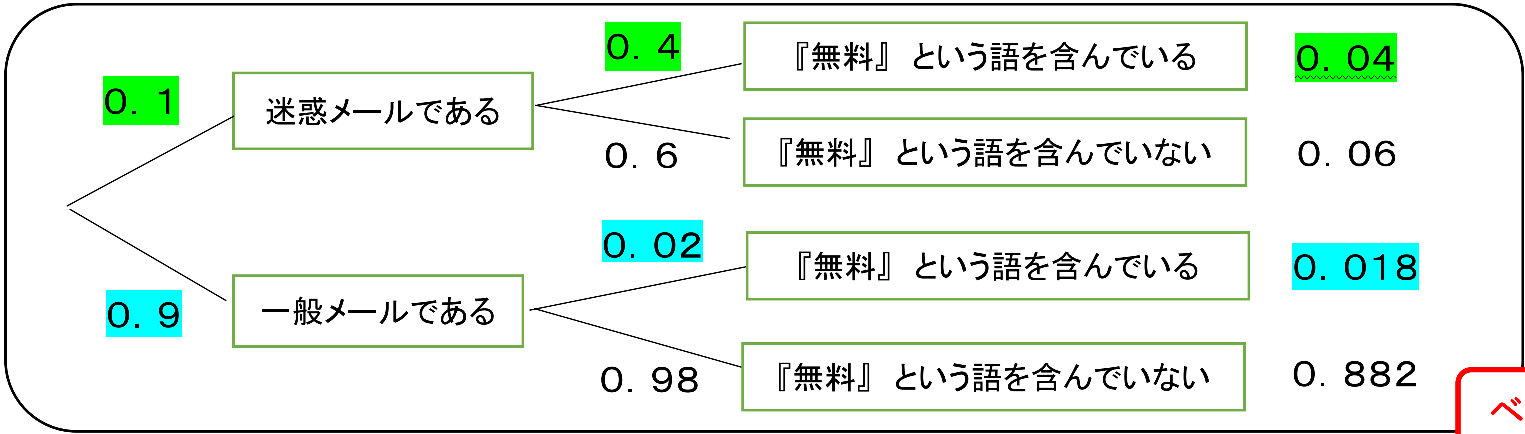
※　陽性的中率：　検査で「陽性」と判定された人のうち本当にウイルス感染している人の割合

そのために、検査を受検する人を、３７．５度以上の発熱のある人、風邪症状の続く人、倦怠感のある人　のように、しぼる。

○　検査の特異度を高める。　（９９%　→　１００．０%）
陽性的中率　（約 0.98%）　（約 0.99%）
※　特異度：ウイルスに感染していない場合に「陰性」と正しく判定する割合

○　検査の感度を高める。　（９９%　→　９９．５%）
陽性的中率　（約 0.98%）　（約 1.94%）

⑥ メールに関して次のような調査結果が得られています。
＜無作為に選んだメールの 10%が迷惑メール、90 %が一般メールである。＞
そこに、次のような新しい調査結果が得られました。
＜迷惑メールが『無料』という単語を含んでいる確率は 40%、一般メールが『無料』という単語を含んでいる確率は 2%である。＞
さて、無作為に選んだメールが『無料』という単語を含んでいた場合、これを迷惑メール、一般メールのどちらと判断するべきですか。



ベイズの定理

（「無作為に選んだメールが『無料』という単語を含んでいた」ときに「迷惑メールである」）確率
＝ 「迷惑メールである」確率 ×（「迷惑メールである」ときに『無料』という単語を含んでいる」）確率
÷ 「無作為に選んだメールが『無料』という単語を含んでいる」確率

＝ 「迷惑メールである」確率 ×（「迷惑メールである」ときに『無料』という単語を含んでいる」）確率
÷ （「迷惑メールである」 かつ 『無料』という単語を含んでいる」）確率
＋ （「一般メールである」 かつ 『無料』という単語を含んでいる」）確率
＝ （0.1×0.4） ÷ （0.1×0.4 ＋ 0.9×0.02）
＝ 0.04 ÷ （0.04 ＋0.018） ＝ 0.04 ÷ 0.058 ＝ 0.689… （約 69%）→ 迷惑メールである

⑦

条件付き確率の式を用いて解決できる問いを作ってみよう。

（個人３分　チャットへ入力してください。）

⑦ 条件付き確率の式を用いて解決できる問いを作ってみよう。

例えば次のような問いが考えられます。

ア　１つのサイコロを投げる。偶数の目が出たとき、４以上の目である確率はいくらか。

イ　あなたは、友達へ贈るクリスマスプレゼントを購入するために、
自宅近くの２階建てのショッピングモールに行きました。
これまでの経験から、目当てのものが２階にある確率は８０％であり、
１階にある確率は２０％です。
ただし、目当てのものがあったとしても見つけられる確率は７０％です。
あなたは、まず２階を見て回りましたが、欲しいものが見つかりませんでした。
このとき、あなたは、もう一度２階を見て回るべきですか、それとも１階を見て回るべきですか。

経験
事前の情報

ウ　あなたは、今日、友達のＡさん、Ｂさん、Ｃさんの家に、この順に遊びに行きました。
自宅を出るときには雨が降っていたので傘をさして出掛けたのですが、Ａさんの家を出るときには雨は止んでいました。
あなたはこれまでの経験から、友達の家に行ったときは、５回に１回は持っていった傘を忘れます。
自宅に戻ったあなたは、傘を忘れたことに気がつきました。道中で忘れることはありません。
あなたは、Ａさん Ｂさん Ｃさんのうち誰の家に、最初に傘をとりに行くべきですか。

経験

⑧

条件付き確率の式は、あなたの人生のどのような場面で、何のためにどのように活用できそうですか。 あるいは、あなたのこれまでの生活場面（授業、HR 活動、委員会活動、学校行事、部活動、家庭等）で、何のために、どのように活用できたと考えますか。

例えば次のようなことが考えられます。

条件付き確率の式は、

○　学校を超えた日常生活や職場などの社会的場面で、（少数のデータしか得られない場面）で、

◎　的確な解釈や判断を行う意思決定をし、よりよく生きるために、
◎　自ら考え、主体的に行動し、社会変革を実現できる力（エージェンシー）を身につけよりよく生きるために

☆　「過去の経験」や「事前情報」　と　「新たに得たデータ」　をもとに、それまでの考えを修正し、そのときの最適な解、納得できる解を導き出す
☆　直接知ることが難しそうな確率を、あることが起きたという条件だけで求める（結果から前提条件がどのような確率で起こっていたかを推測する）

のに活用できる。

課題

①洞察をうながす問いにするには？

→生徒が文脈を越えられるような問い

→教科書などで公式のように扱われており，生徒が「当たり前だ」と思っているようなことに対しての問い

課題

②Extensionsの先？

→生徒にどのようになってほしいか？

→「活用」
　授業の後，生徒は何ができるようになるのか？

私の課題

○　生徒が、「確率の考え方のよさを活かして、確率を、よりよく生きるために自己の夢や目標を実現したり、最適解や納得解を導いたりするための意思決定に活用し、自立した社会の構成者となる。」ための足掛かりとなるような『 授業づくり 』、『 問いづくり』を模索中。

「SE、E、PrE、C　それぞれの問いづくり」

「授業展開」

私自身の納得解はまだまだ得られていない。

☆　　生徒が主役になり、探求したくなる学び
　　生徒が価値を生み出していけるような学び
　　生徒の生き方に反映されるような学び
そのための、『問い』『授業展開』をはじめとする「ICE モデル」というフレームの活用方法を、同教科、他教科、他校種の先生方からの助言をもとに学んでいきたい。